RELATIVITÉ MULTIDIMENSIONNELLE NON STATIONNAIRE

par JEAN-MARIE SOURIAU
Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille

1. — Principes

Les lois de conservation découvertes expérimentalement (impulsion, énergie, électricité, charge nucléonique, étrangeté, etc.) ont été successivement rattachées à des propriétés d'invariance, par l'intermédiaire de principes variationnels (théorème de NOETHER [1]).

Or il existe deux sortes de transformations mises en jeu :

1°) les transformations géométriques d'espace-temps;

2°) les transformations « internes », qui agissent non sur les points, mais sur les valeurs des champs en chaque point. (Exemple : transformations de jauge).

L'invariance dans les transformations du premier type résulte du principe même de relativité : les lois de la physique sont invariantes par certaines transformations d'espace-temps, qui agissent sur chaque champ selon sa variance.

Or l'expérience permet d'énoncer un principe remarquablement analogue pour les transformations du second type : les transformations internes forment un groupe I; chaque champ est pourvu d'une *variance interne* (définie par une représentation de I opérant sur les valeurs possibles du champ en chaque point); les lois de la physique sont invariantes par I.

Il est souhaitable d'unifier ces deux principes; on peut dans ce but essayer de remplacer l'espace-temps V_4 par une variété V_n ayant plus de quatre dimensions; les transformations géométriques de V_n — que nous désignerons par le mot « glissement » — devront rendre compte à la fois des transformations géométriques de la Relativité classique et des transformations internes. Pour rendre compte de l'existence et du rôle privilégié de la variété V_4, on admet généralement un principe de stationnarité; on postule l'existence d'un groupe $\mathcal{G}$ de glissements qui laisse tous les champs invariants; V_4 apparaît comme le quotient de V_n par $\mathcal{G}$; moyennant quelques hypothèses, on arrive à faire passer au quotient les champs stationnaires de V_n, qui deviennent des champs définis sur V_4.

Ce principe de stationnarité est peu satisfaisant, pour diverses raisons : il fait disparaître le caractère unitaire de la théorie, puisque la physique n'est plus invariante que par les glissements qui commutent avec $\mathcal{G}$; il ne peut coexister avec un principe variationnel que comme *règle de sélection,* mais non comme *liaison* ; et surtout, il ne permet pas d'interpréter les transformations internes, puisqu'il suppose l'invariance de tous les champs par $\mathcal{G}$.

Nous proposons donc de le remplacer par le suivant :

La variété V_n est homéomorphe au produit direct de R^4 par une *variété compacte* W (de dimension $n-4$).

Une fois déterminée la structure topologique de W, qui constitue l'aspect *global* de la physique, on en cherchera l'aspect *local,* sous la forme d'un énoncé variationnel.

On disposera ainsi d'une théorie strictement unitaire, au sens de Lichnerowicz ([2] p. 152) ; la réduction apparente de V_n à V_4 sera due au caractère *microscopique* de W.

2. — Théorie pentadimensionnelle

1) En attribuant à W la structure topologique d'un *cercle* S_1, on obtient une théorie unitaire à cinq dimensions [3, 4] ; la variété V_5 est homéomorphe à un « tube » $R^4 \times S_1$; on peut lui donner des *cartes périodiques,* applications de R^5 sur V_5 telles que la variable x^5 admette par exemple la période 2π.

2) Nous dirons que l'univers est *stationnaire* s'il existe une carte périodique où les glissements $x^5 \to x^5 + C^{te}$ laissent tous les champs invariants ; ce cas équivaut substantiellement à la théorie de Jordan-Thiry [5, 6, 7] ; on achève l'identification en supposant définie sur V_5 une métrique hyperbolique normale $g_{\alpha\beta}$ (les courbes fermées obtenues en faisant varier x^5 seul étant du genre espace) et en écrivant les équations d'Einstein.

Le cas stationnaire s'interprète quadridimensionnellement au moyen d'un champ de tenseur g^*_{jk} (lettres latines $= 1, 2, 3, 4$), qu'on identifie avec les *potentiels de gravitation,* un champ de formes linéaires A_k qu'on identifie avec les *potentiels électromagnétiques* et qui admet l'invariance de jauge, et un champ scalaire d'interprétation plus difficile ; ce scalaire est d'ailleurs égal au « rayon du tube univers », soit $\xi = \sqrt{-g_{55}}$; s'il est suposé constant, on retrouve la théorie de Kaluza-Klein [7, 8], équivalente à la théorie provisoire de l'électromagnétisme en Relativité générale.

3) Nous traiterons le cas *quasi-stationnaire* en écrivant des équations de champ, en les linéarisant au voisinage d'une solution stationnaire, et en faisant un développement de Fourier suivant la variable x^5

$$\Phi = \sum_n \Psi_n \, e^{inx^5}$$

On constate que les « fonctions d'onde » Ψ_n ainsi introduites vérifient des équations quadridimensionnelles distinctes ; ainsi, à un champ scalaire réel vérifiant l'équation (1) :

$$\pentagon \, \varphi + a \varphi = 0$$

correspondent des fonctions d'onde complexes ψ_n vérifiant

$$\Box \, \psi_n - \frac{4 \, in \sqrt{\mathrm{G}}}{c\xi} \mathrm{A}^j \, \partial_j \, \psi_n + \left[a + \frac{n^2}{\xi^2} - \frac{4\mathrm{G}}{c^2 \, \xi^2} n^2 \, \mathrm{A}^j \, \mathrm{A}_j \right] \psi_n = 0$$

(on a supposé ξ constant et désigné par G la constante de gravitation de Newton) ; on reconnait l'*équation de Klein-Gordon, en présence d'un champ électromagnétique,* pour une particule de charge électrique $\dfrac{2n\hbar\sqrt{\mathrm{G}}}{c\xi}$, de masse $\dfrac{\hbar}{c}\sqrt{a + \dfrac{n^2}{\xi^2}}$; ainsi, dans cette théorie :

— les interactions électromagnétiques (au moins sous la forme usuelle en Mécanique ondulatoire) ont un caractère purement géométrique, de même que les interactions gravitationnelles en Relativité générale ;

— toutes les charges électriques sont multiples d'une charge élémentaire ($n = 1$), indépendante de la masse des particules.

En identifiant cette charge élémentaire avec la charge e de l'électron, on trouve la valeur du rayon du tube-univers :

$$\xi = \frac{2\hbar\sqrt{\mathrm{G}}}{ec} = 3{,}77 \cdot 10^{-32} \text{ cm}$$

Cette longueur, qui joue le rôle de « longueur élémentaire », est beaucoup plus petite que les rayons des noyaux atomiques ($\# \ 10^{-13}$ cm) [2].

4) Bien que la théorie prévoie des *états de charge multiple* pour toutes les particules (l'indice n des fonctions d'onde Ψ_n peut prendre toutes les valeurs entières), la petitesse de ξ entraîne l'impossibilité pratique de les créer : on constate qu'il faudrait une énergie de l'ordre de $c\dfrac{\hbar}{\xi} \ \# \ 5 \cdot 10^{20}$ MeV.

(1) Nous désignons par $\pentagon$ l'opérateur ∇^2 sur la variété V_5; cette équation est la seule équation linéaire invariante par les transformations de Lorentz *pentadimensionnelles.*

(2) Il n'est pas exclus que. dans une particule, ξ subisse une variation, de l'ordre de ξ^2/r (r = rayon de la particule) ; il en résulterait une différence de charge entre proton et électron de l'ordre de $3 \cdot 10^{-19} \, e$.

5) Dans la présente théorie, l'approximation de la Relativité restreinte consiste à supposer l'existence d'une carte périodique où les $g_{\alpha\beta}$ sont constants; les glissements qui laissent ce champ invariant forment un groupe, dont on peut montrer qu'il est le produit direct du groupe de Lorentz non homogène usuel L par le groupe O_2 des matrices orthogonales réelles d'ordre 2; on interprétera les éléments de O_2 comme des *transformations de jauge* (si leur déterminant est $+1$) ou des *conjugaisons de charge* (s'il vaut -1); le groupe O_2 a d'ailleurs déjà été proposé à cet effet par L. MICHEL [10].

L'étude des représentations unitaires irréductibles du groupe $L \times O_2$ conduit à associer à la masse et au spin des particules élémentaires, un entier *n,* qui s'interprétera comme leur charge électrique; s'il est nul (particules neutres), les conjugaisons de charge multiplient la fonction d'onde par ± 1; on trouve notamment -1 pour le photon, conformément à l'expérience (*cf.* L. MICHEL [10]), et $+1$ pour le graviton.

6) Il est loisible (puisqu'il s'agit d'une condition *locale*) de supposer V_5 *orientée,* ce qui signifie que les glissements doivent tous avoir un jacobien positif (voir [11]); dans ce cas, on démontre que le groupe $L \times O_2$ doit être remplacé par le sous-groupe obtenu en donnant le même signe au jacobien de la transformation de Lorentz et au déterminant de la matrice orthogonale; en d'autres termes, *un retournement d'espace ou de temps doit nécessairement être accompagné d'une conjugaison de charge :* on voit comment une théorie multidimensionnelle est capable d'interpréter les relations — constatées expérimentalement — entre les transformations de parité et de charge.

3. — Dimensions plus élevées

Bien que la théorie ci-dessus à cinq dimensions ait des aspects satisfaisants, elle ne parvient pas à rendre compte de toutes les invariances internes que l'on observe. On est donc amené à penser que la structure topologique de W est plus compliquée que celle d'un cercle.

Il ne semble pas que l'on soit actuellement d'accord sur la structure du groupe I des transformations internes; mais les différentes hypothèses semblent compatibles avec l'interprétation géométrique que nous proposons : il s'agit du groupe O_3 dans la théorie de PAIS [12], du groupe O_4 dans celle de SCHWINGER [9]; elles s'interprétent en prenant respectivement pour W les sphères S_2 et S_3. On peut aussi proposer — pour expliquer le rôle privilégié des interactions électromagnétiques et pour conserver, à titre d'approximation, les résultats de la théorie pentadimensionnelle — de prendre pour W la topologie de $S_1 \times S_2$, ou encore de $S_1 \times S_3$. On obtient donc des théories concurrentes ayant respectivement 6, 7, et 8 dimensions. La discussion et l'étude détaillée d'une telle théorie feront l'objet d'une publication ultérieure.

REFERENCES

[1] E. NOETHER, *Nach. kgl. Ges. Wiss. Göttingen*, p. 235 (1918).

[2] A. LICHNEROWICZ, « Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme », Masson, Paris, 1955.

[3] J. M. SOURIAU, « Une axiomatique relativiste pour la microphysique », *C.R.A.S.*, **247**, 1559 (1958).

[4] J. M. SOURIAU, « Conséquences physiques d'une théorie unitaire », *C.R.A.S.*, **248**, 1478 (1959).

[5] P. JORDAN, *Ann. Physik*, 219 (1947).

[6] Y. THIRY, « Etude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ » (thèse), Gauthiers-Villars (1951).

[7] KALUZA, « Zum Unitäts Problem der Physik », *S. Preuss. Akad. Wiss.*, 966 (1921).

[8] O. KLEIN, *Z. Physik*, **73**, 895 (1926).

[9] J. SCHWINGER, « Théorie des particules élémentaires » (conférences en Sorbonne, juin 1957).

[10] L. MICHEL, « Selection Rules Imposed by Charge Conjugation », *Nuovo Cimento*, **10**, 319 (1953).

[11] J. M. SOURIAU, « La Relativité variationnelle », *Alger-Mathématiques* **V**, 2 (1958).

[12] A. PAIS, « Isotopic Spin and Mass Quantization », *Physica*, **19**, 869 (1953).

DISCUSSION

Intervention du Prof. Ivanenko.

Des idées analogues à celles exprimées dans le rapport intéressant de M. SOURIAU sont développées dans les travaux de J. RAISKY (Cracovie), du Professeur ZAYCOFF (Sofia, Bulgarie), de même que dans des recherches de notre groupe (voir les articles de H. SOKOLIK, d'A. BRODSKY et de moi-même publiés dans le *Journal de Physique Théorique et Expérimentale* (russe), de même que dans le *Nuovo Cimento*, 1958). Nous avons essayé de permettre les transitions entre sous-espace ordinaire et sous-espace de spin isotopique.